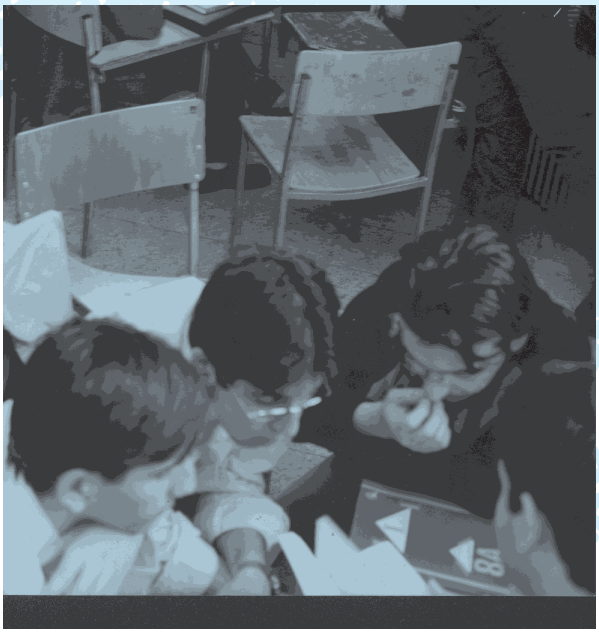

درک دانش‌آموزان پایه اول متوسطه (نهم) از مفهوم تساوی در حل معادلات درجه اول

ملیحه دهقان‌نیری، کارشناس ارشد آموزش ریاضی و دبیر ریاضی باقرشهر، شهرستان‌های استان تهران
زهرا گویا، دانشگاه شهید بهشتی

مقدمه

دانش‌آموزان بسیار مبتکرند. وقتی با مسئله‌ای مواجه می‌شوند که نمی‌دانند چگونه آن را حل کنند، الگوریتم‌هایی ابداع می‌کنند و آن‌ها را برای حل مسئله به‌کار می‌برند، هرچند اغلب این الگوریتم‌ها به پاسخ‌های نادرست منتهی می‌شوند. مثلاً در فرایند یادگیری عمل تفریق، اکثر دانش‌آموزان، اشتباه معروفِ «کوچک‌تر را از بزرگ‌تر کم کن» را مرتکب می‌شوند (بن‌زیو، ۱۹۹۶)

ریاضی یکی از مهم‌ترین موضوع‌های درسی در مدارس، در جوامع کنونی است، اما تدریس مؤثر و مطلوب آن بسیار مشکل است. می‌دانیم که ریاضی علمی انتزاعی است، بنابراین به‌محض اینکه ارتباط خود را با دنیای واقعی، که دانش‌آموزان می‌شناسند، از دست می‌دهد، برای بسیاری از آن‌ها بی‌معنی می‌شود. به‌همین دلیل است که در سراسر دنیا، دانش‌آموزان در درس‌های ریاضی خود افت دارند و حتی بسیاری از بزرگ‌سالان نیز آن را درک نمی‌کنند. هم‌چنین، بسیاری از معلم‌ها نیز درک ریاضی را مشکل می‌دانند (بیشاب، ۱۹۹۸). برای مثال، یکی از مفاهیم مشکل‌آفرین در شروع یادگیری جبر، درک **علامت تساوی** است.

به گفته غلام‌آزاد (۱۳۸۰)، دانش‌آموزان عموماً قبل از آنکه وارد آموزش رسمی جبر شوند، شروع به حل معادلات ساده می‌کنند. اما تجربهٔ آن‌ها از علامت تساوی در حساب، که در واقع برای آن‌ها به معنای «دنبال جواب بودن» است، ممکن است در درک آن‌ها از معادله و عبارت‌ها اثر بگذارد. آن‌ها عموماً علامت تساوی را به‌عنوان علامت «جواب را بنویس» در نظر می‌گیرند، به‌جای آنکه این علامت، مفهوم هم‌ارزی دو عبارت را برایشان تداعی کند. در نتیجه، به این دلیل که **معادله** یکی از مفاهیم اولیّه و اساسی جبر است که دانش‌آموزان از آن برای ایجاد مدل‌ها و حل مسائل ریاضی استفاده می‌کنند، بسیاری از محققان، در زمینهٔ

حل معـادلات درجهٔ اول، بدفهمی‌هایی را شناسـایی کرده‌انـد و اکثراً بر بدفهمی‌های دانش‌آموزان نسـبت به **علامت تسـاوی** تأکید نموده‌اند. از نظر کارپنتر و همکاران (۲۰۰۳)، درک محدود دانش‌آموزان از معنی علامت تسـاوی، یکی از موانع اصلی در یادگیری جبر است.

کلیدواژه‌هـا: حل معادله، علامت تساوی، ریاضی پایهٔ اول متوسطه، معادله درجهٔ اول

کاربرد و تفسیرهای علامت تساوی

برای نشـان دادن روابط ریاضی، از علامت‌های < (بزرگ‌تر از) و > (کوچک‌تر از) و ≥ (بزرگ‌تر یا مساوی) و ≤ (کوچک‌تر یا مساوی)، استفاده می‌شود، اما میزان به‌کارگیری علامت تساوی (=) در تمام شاخه‌های ریاضی، بیش از همه است و بر وجود یک **رابطهٔ تعادلی** دلالت می‌کند. علامت تساوی، به‌عنوان یک نماد رابطه‌ای، به روش‌های مختلفی نمایش داده می‌شـود. مثلاً گاهی اوقات، از آن برای نشان‌دادن یک اتحاد استفاده می‌شود، مثـل $(a+b)^2 = (a+b)(a+b)$. گاهـی برای تعریف یک تابع به‌کار برده می‌شـود، مثـل $f(x)=2x+3$. زمانی دیگر، به همراه جای خالی اسـتفاده می‌شـود و به‌عنوان نمادی برای انجام دادن چیزی تفسیر می‌شود یا به‌عنوان نمادی که پیامش این اسـت که «جواب را پیدا کن» (--- = ۴+۳).

این در حالی اسـت که سینز- لودلو[1] و والگاموث[2] (۱۹۹۸) نیز به این نکته اشـاره دارند که دانش‌آموزان، الزاماً انتخابی برای تعریف و تعیین نمادهایی که به‌کار می‌برنـد ندارنـد و در این صـورت، تنهـا قراردادها را می‌پذیرند. برای مثال، قبول علامت تساوی یا استفاده از آن، به این معنی نیسـت که آن‌ها از نظر ریاضی آن را فهمیده‌اند.

معانی تساوی و علامت تساوی

بسـیاری از محققان، بر تمایـز مهم بین دو معنی عملیاتی و رابطه‌ای برای تساوی تأکید دارند (کی‌پِرن، ۱۹۸۱؛ وینتر، ۱۹۸۲؛ وُلترز، ۱۹۹۱؛ فیلوی و همکاران، ۲۰۰۳؛ نـوث و همـکاران، ۲۰۰۶). کی‌پِرن (۱۹۸۱) دریافت که دانش‌آموزان دورهٔ ابتدایی علامت تسـاوی را به‌عنوان نمادی می‌بینند که مسـئله و پاسخ مسئله را از هـم جدا می‌کند. از نظـر وی، فقط تغییر معانی از عملیاتـی به رابطـه‌ای، قانون قـراردادی «جملات هـر دو طـرف معادله را بخـوان» را توجیـه می‌کند. پریدیگر[3] (۲۰۱۰) نیز معتقد است که آموزش حساب دورهٔ ابتدایـی با تمرکز بر تسـاوی‌های نامتقارن مثل ۱= ۳ - ۶÷ ۲۴، بـر معنـای عملیاتیِ علامت تسـاوی تأکید دارند. در نتیجه، کاربرد متقارن و رابطه‌ایِ علامت تسـاوی در جبرِ دورهٔ اول متوسـطه، با مشکل مواجه می‌شـود که به‌عنوان نمونه، می‌توان به عباراتی مانند: ۷ × ۴ + ۷ × ۲۰ = ۷ × ۲۴ یـا معـادلات جبری مانند $x^2 = -x + 6$ اشاره نمود.

در نتیجـه، بسـیاری از محققان آمـوزش ریاضی در مورد مشکلات توسـعهٔ معنای رابطه‌ای، در ارتباط با علامت تسـاوی برای تسـهیل گذر دانش‌آموزان از حساب به جبر، پیشـنهاد کرده‌اند که کاربرد رابطه‌ای و متقارن علامت تسـاوی نیز، در برنامهٔ درسی ریاضی دورهٔ ابتدایی وارد شود (کی‌پِرن، ۱۹۸۱؛ وینتر[4]، ۱۹۸۲؛ ولترز[5]، ۱۹۹۱؛ تِیس[6]، ۲۰۰۵).

پریدیگر (۲۰۱۰، به نقل از مِیل، ۱۹۹۳ و کورتِس و همـکاران، ۱۹۹۰) بیان می‌کند که فرایند یادگیری جبر، تحت‌تأثیر معنای رابطه‌ای است و علامت تساوی، معناها و تفسیرهای متفاوتی دارد که مهم‌ترین آن‌ها در شش مورد زیر، آورده شده است:

۱. معنـای عملیاتی: عملیات برابر اسـت با جواب: ۱ = ۳- ۶ ÷ ۲۴؛

۲. معنای رابطه‌ای:

۲. آ - عبارت حسـابی متقـارن: ۵ + ۷ = ۷ + ۵ یا $۹^2 - ۱۰^2 = ۱۹$؛

۲. ب- تعادل رسمی که جملات معادل را توصیف می‌کند: $(x+3)(x-2) = x^2 + x - 6$؛

۲. ج- معادلهٔ شـرطی که مجهول‌ها را مشـخص می‌کند: معادله $x^2 = -x + 6$ را حل کنید.

۲. د- پارامترهای زمینه‌ای در فرمول؛ مانند فرمول مساحت دایره ($A = \pi r^2$) یا مثلث قائم‌الزاویه با وتر c و اضلاع a و b، که در $a^2+b^2=c^2$ صدق می‌کنند؛

۳. تعیین یا توصیف:

$m = \frac{\pi}{2}(a+b)$ یا $y = 2x + 52$

دسـته اول؛ معنـای عملیاتـی بـرای کاربرد غیرمتقارن مورد اسـتفاده قرار می‌گیـرد: «عملیات برابر اسـت با جواب» (مک‌نیل[7] و همکاران، ۲۰۰۶)، این دسـته اغلب برای حسـاب دورهٔ ابتدایی توضیح داده می‌شود. هم‌چنین در ریاضیات پایه‌های بالاتر مثل حسابان هنگام مشتق‌گیری از تابع چندجمله‌ای به‌کار می‌رود و برای مثال نوشته می‌شود: $f'(x)=(3x^2)'=6x$.

بسیاری از محققان آموزش ریاضی در مورد مشکلات توسعهٔ معنای رابطه‌ای، در ارتباط با علامت تساوی برای تسهیل گذر دانش‌آموزان از حساب به جبر، پیشنهاد کرده‌اند که کاربرد رابطه‌ای و متقارن علامت تساوی نیز، در برنامهٔ درسی ریاضی دورهٔ ابتدایی وارد شود

دستهٔ دوم، معنای رابطه‌ای متمرکز بر کاربرد متقارن علامت تساوی است. این دسته، خود شامل چهار زیردسته است، که هریک متفاوت از دیگری است. پریدیگر (۲۰۱۰) از کی‌یِرن (۱۹۸۱) کلمهٔ عبارت حسابی را قرض می‌گیرد (زیردستهٔ ۲. آ). کی‌یِرن (۱۹۸۱) این کلمه را برای ارتباط با دانش‌آموزان ابداع کرد که بتوانند تساوی‌های حسابی متقارن را از آن‌هایی که شامل متغیرهاست تشخیص دهند.

تعادل رسمی (زیردستهٔ ۲. ب) به تعادل جملات جبری شامل متغیرها اشاره می‌کند: $x^2 + x - 6 = (x-2)(x+3)$ که برای تمام مقادیر x صدق می‌کند. این تعادل رسمی، بسته به تفسیر متغیرهای شامل آن، می‌تواند به روش‌های متفاوت تفسیر شود.

در کلاس درس جبر، مهم است که تعادل رسمی، با تفاسیر متفاوتی که دارد، از معادلات شرطی برای تشخیص مجهول‌ها متمایز شود. اگرچه، معادله $x^2 + x - 6 = (x-2)(x+3)$ به‌طور نمادین شبیه $x^2 = -x + 6$ است، اما ویژگی کاملاً متفاوتی دارد که برای تمام xها به‌کار نمی‌رود. به‌علاوه، مجهول‌های خاصی را مشخص می‌کند و با حل معادله، یک عدد می‌تواند به‌عنوان مجهول مشخص شود.

در زیردستهٔ (۲. د)، پارامترهای زمینه‌ای در فرمول که در یک طرف تساوی قراردارند، فرمولی مثل فرمول مساحت دایره یا معادلهٔ فیثاغورس $a^2+b^2=c^2$ که عبارات اصلی هستند، اما از طرف دیگر آن‌ها برای تمام a و bها مثل تعادل‌های رسمی $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$ به‌کار نمی‌روند. آن‌ها فقط در زمینه‌های خاص اصلی هستند؛ برای مثال، به‌کار بردن a، b و c برای طول‌های مثلث قائم‌الزاویه.

کورتس[8] و همکاران (۱۹۹۰) معرفی **دستهٔ سومی را به نام تعیین یا توصیف**، پیشنهاد کردند که در آن، پارامترها تشریح نمی‌شوند بلکه مثل تعاریف بیان می‌شوند. تفاوت آن با پارامتر زمینه‌ای این است که به تشخیص بین تعاریف و پیش‌فرض‌ها کمک می‌کند. در مجموع، تفاسیر بسیار متنوعی از علامت تساوی وجود دارد.

درک تساوی به‌عنوان یک رابطه

دانش‌آموزان باید بفهمند که تساوی رابطه‌ای است که بیان می‌کند دو عبارت ریاضی ارزش یکسان دارند. به‌دست‌آوردن این درک، ارتباطات بین حساب و جبر را بیشتر می‌کند. برای مثال، وقتی یک دانش‌آموز مسئلهٔ ۱+(۸-۱۰)=(۱-۸)-۱۰ را حل می‌کند درگیر حساب است و در ضمن در حال یادگیری مهارت‌های فکری ضروری برای درگیر شدن در جبر، به‌ویژه خاصیت شرکت‌پذیری در اعداد صحیح، است.

بعد از آشنایی با این نوع رابطه، مسائل مشکل مانند: a-(b-c)=(a-b)+c برای دانش‌آموزان دشوار نیست. اما اگر فکر کنند که علامت مساوی به این معنی است که باید عملیاتی اجرا شود، برایشان دشوار خواهد بود بفهمند که وقتی مقداری مثل c از یک طرف معادله کم می‌شود، از طرف دیگر نیز همان مقدار کاهش می‌یابد (اُکسوز، ۲۰۰۱). در این شرایط، تنها روشی که آن‌ها می‌توانند درگیر آن شوند، «به‌خاطر سپردن یک سری قوانین برای حل معادلات است». به‌دلیل اینکه چنین قوانینی با درک ناقص همراهند، دانش‌آموزان قادر نیستند به‌درستی آن‌ها را به‌خاطر بیاورند و به‌راحتی از آن‌ها استفاده کنند (فاکنر، لوی و کارپنتر، ۱۹۹۹). دلیل دیگری که دانش‌آموزان به این درک نیاز دارند، این است که بتوانند روابط بیان‌شده توسط جملات عددی را ببینند. برای مثال، وقتی یک دانش‌آموز جملهٔ عددی ۷+۷+۱=۷+۸ را می‌بیند و می‌گوید «من به‌خاطر نمی‌آورم که ۷ به علاوه ۸ چند می‌شود، اما می‌دانم که ۷ به اضافه ۷ می‌شود ۱۴ و سپس یکی به آن اضافه می‌کنم و حاصل ۱۵ می‌شود»، او یک رابطه خیلی مهم یعنی ویژگی شرکت‌پذیری را شرح می‌دهد که این ویژگی در حساب، یک اصل است (فاکنر، لوی و کارپنتر، ۱۹۹۹.)

بعد از گسترش توانایی بیان روابط، دانش‌آموزان باید بتوانند همان اصول ریاضی را برای حل مسائل دشوارتر مثل ۱۸ - ۴۵ به‌کار ببرند، یعنی با بیان آن به‌صورت ۲+ ۲۰ - ۴۵ = ۱۸ - ۴۵ (فاکنر، لوی و کارپنتر، ۱۹۹۹) یا a-b را به‌شکل a-b=a-b+۲-۲ دربیاورند. هم‌چنین، اُکسوز (۲۰۰۱) عقیده دارد که درک تساوی به‌عنوان یک رابطه، فرصتی عالی فراهم می‌کند تا در حل معادلات، جملات قرینه به‌سادگی حذف شوند (ساده شوند).

بدفهمی‌های علامت تساوی

براساس یافته‌های تحقیقی متعدد (سینز- لودلو و والگاموث، ۱۹۹۸؛ بِر، اِرلوانگر و نیکولز، ۱۹۸۰؛

فاکنر، لوی و کارپنتر، ۱۹۹۹)، دانش‌آموزان، از سال اول تا ششـم ابتدایی، دربارهٔ معنای علامت تسـاوی بدفهمی‌هـای جـدی دارنـد، ولی ایـن بدفهمی‌ها هنگامی که دانش‌آموزان فعالیت‌های حسابی را انجام می‌دهند، معمولاً مورد توجه قرار نمی‌گیرند؛ زیرا در این فعالیت‌ها، رابطهٔ بین دو طرف تساوی مورد نظر نیسـت و فقط یک عدد در سمت راست این علامت ظاهر می‌شود. بدین سبب، هنگامی‌که دانش‌آموزان بـا انواع دیگر جملات و به‌ویژه عبارات جبری مواجه می‌شوند، موقع استفاده از علامت تساوی، با مشکلات جدی مواجه می‌شوند. آن‌ها تلاش می‌کنند قوانین و درک خودشان از علامت تساوی را به‌کار ببرند، مثل اینکـه گاهی اوقات، جواب‌ها را محاسـبه می‌کنند و گاهی در جسـت‌وجوی روابط هستند، گاهی اوقات به دو طرف تسـاوی توجه می‌کنند و گاهی فقط به یـک طرف توجه دارند (مولینا، آمبروس و کاسـترو، ۲۰۰۴).

کاراهِر، شـلیمَن و بریزولا (۲۰۰۰- نقل‌شـده در مولینا، آمبروس و کاسترو، ۲۰۰۴) مطرح می‌کنند که آموزش‌هـای مقدماتی دانش‌آموزان در ریاضی، یکی از دلایل اصلی مشـکلات آن‌ها در یادگیری جبر اسـت. در مطالعات بِر، اِرلوانگـر و نیکولز (۱۹۸۰) با کودکان شش تا دوازده سـاله، مشاهده شد که دانش‌آموزان نه فقط علامت تساوی را به‌عنوان محرکی برای یک پاسخ می‌بینند و می‌فهمند، بلکه در مـورد عباراتی که باید نوشته شوند نیز ایده‌هایی قطعی دارند و این نوع نگاه به علامت تساوی، باعث ایجاد بدفهمی‌های جدیِ بعدی در آن‌ها می‌شود.

کارپنتر، فرانک و لـوی (۱۹۹۹) نیز در تحقیقات خود به بدفهمی‌های زیر اشاره کردند:

۱. تفسـیر علامت تسـاوی به‌عنوان یک فرمان برای به‌دسـت‌آوردن و پاسـخ دادن. با این فرض که عملیـات باید در طرف چپ تسـاوی انجام شـود و بلافاصله پاسـخ آن در طرف راست تساوی قرارگیرد. برای مثال، برخی دانش‌آموزان به معادلهٔ ۵+ ___ = ۴+۸ پاسخ ۱۲ دادند.

۲. عملیات تمام اعداد با هم. برای مثال، پاسخ ۱۷ را برای معادلهٔ ۵+ ___ =۴+۸ نوشتند.

هم‌چنین، متیوز و همکاران (۲۰۱۲) به دو مشکلی که ممکن است دانش‌آموزان در زمان حل معادله با آن مواجه شوند، اشاره کردند:

۱. با اینکه کاربرد متغیر و جای خالی از نظر منطقی یکسـان اسـت، دانش‌آموزان، معادلاتی را که در آن‌ها به‌جای متغیر، جای خالی به‌کار رفته است راحت‌تر حل می‌کنند؛

۲. دانش‌آمـوزان، معادلاتـی را کـه در یک طرف علامت تساوی عملیات دارد، نسبت به معادله‌ای که در دو طرف علامت تساوی عملیات حسابی دارد، راحت‌تر حل می‌کنند.

درک دانش‌آموزان از علامت تساوی

تحقیقـات نشـان می‌دهد کـه برای بسـیاری از دانش‌آموزان دورهٔ ابتدایی علامت تساوی یعنی به‌طور خودکار پاسخ را بنویس (بِر و همکاران، ۱۹۸۰؛ کارپنتر و همکاران، ۲۰۰۳؛ دمونتی و ولاسیس، ۱۹۹۹؛ فاکنر و همـکاران، ۱۹۹۹؛ هرسـکوویچ و کی‌یِـرِن، ۱۹۸۰؛ لوبینسـکی و اُتو، ۲۰۰۲؛ سـینز- لودلـو و والگاموث، ۱۹۹۸؛ استیسـی و مک گریگور، ۱۹۹۷- نقل‌شده در اِسیین و سِتّتی، ۲۰۰۶). از این گذشته، بِر و همکاران (۱۹۸۰) و کی‌یِـرِن (۱۹۸۱) با دانش‌آموزان شـش و هفت سـاله کارکردند و فهمیدند که اکثر آن‌ها علامت تساوی را فقط وقتی قبول می‌کنند که در مقابل جمع و تفریق باشد. بنابراین یک عبارت شبیه ۴+۲ = ___ برای آن‌ها مفهومی ندارد و بیان کردند که علامت تساوی در مکان اشتباهی قراردارد.

فاکنر و لِوی و کارپنتر (۱۹۹۹) نیز تحقیق مشابهی انجـام دادند. آن‌ها به دانش‌آموزان پایهٔ اول تا ششـم، عبـارت ۵+ ___ =۴+۸ را دادند و از آن‌ها خواسـتند تا جای خالی را پرکنند. اکثر دانش‌آموزان تمایل داشتند پاسـخ سمت چپ را محاسبه کنند و در مقابل علامت تساوی، آن را بنویسند.

افزون بر ایـن، بِر و همـکاران (۱۹۸۰) و کی‌یِرِن (۱۹۸۱) بدفهمی دانش‌آموزان از مفهوم علامت تساوی را به روشی که به آن‌ها تدریس می‌شود، نسبت دادند. آن‌هـا بحث کردنـد که درک دانش‌آمـوزان از علامت تسـاوی یعنی «خروجی مورد انتظـار از آموزش‌هایی که بچه‌ها دریافت کرده‌اند». استیسـی و مک گریگور (۱۹۹۷) و کارپنتر و همکاران (۲۰۰۳) هم بحث کردند که استفاده از ماشین‌حساب به تقویت این ایده کمک می‌کند که علامت تسـاوی به‌عنـوان یک فرمان، یک محاسبه را انجام می‌دهد، زیرا این همان کاری است که با فشردن دکمهٔ تساوی، ماشین‌حساب انجام می‌دهد.

دمونتی و ولاسیس (۱۹۹۹- نقل شده در اِسیین و سِتّتی، ۲۰۰۶) اشاره کردند که برخی از بدفهمی‌های

استیسی و مک گریگور (۱۹۹۷) و کارپنتر و همکاران (۲۰۰۳) هم بحث کردند که استفاده از ماشین‌حساب به تقویت این ایده کمک می‌کند که علامت تساوی به‌عنوان یک فرمان، یک محاسبه را انجام می‌دهد، زیرا این همان کاری است که با فشردن دکمهٔ تساوی، ماشین‌حساب انجام می‌دهد

دانش‌آموزان دربارهٔ علامت تساوی به‌دلیل استفاده از استعاره‌ها در بیان چرایی یک موضوع است، به‌عنوان مثال، ۳+a بیشتر از این نمی‌تواند ساده شود.

یک اشتباه جبری معمول دانش‌آموزان این است که می‌خواهند ۳+a را بیشتر ساده کنند و آن را به عبارتی مانند ۳a یا a۳ تبدیل سازند. در این مورد دانش‌آموزان کاملاً تحت تأثیر تفسیر خودشان از علامت تساوی، به‌عنوان یک نماد برای انجام دادن چیزی، هستند.

فاکنر و همکاران (۱۹۹۹) بحث کردند که «به‌محض اینکه نمادها برای نمایش عملیات روی اعداد معرفی می‌شوند، معلمان باید دربارهٔ فهم دانش‌آموزان از تساوی نگران باشند».

کارپنتر و همکاران (۲۰۰۳) نیز مطرح می‌کنند که از به‌کار بردن علامت تساوی به روش‌هایی که رابطهٔ تساوی بین اعداد را نشان نمی‌دهد دوری کنید. مثال‌های چنین نمایش‌های اشتباه از علامت تساوی عبارت‌اند از: لیست‌های سنی (مثل جان=۸ و مارکی=۹) یا مشخصه‌های عددی افراد یا چیزها یا استفاده از علامت تساوی در معرفی تعداد اشیاء در یک مجموعه یا مقایسهٔ دو عکس (کارپنتر، ۲۰۰۳)

پژوهش حاضر

در پژوهشی که در این مقاله معرفی می‌شود، نویسندهٔ اول، پس از معرفی خود و توضیح سؤالات، از دانش‌آموزان یک کلاس پایهٔ نهم درخواست کرد که، در صورت تمایل، با دقت و حوصلهٔ کافی به سؤالاتی در مورد چگونگی درک آن‌ها از علامت تساوی، پاسخ دهند. در این کار آن‌هایی که مایل به پاسخ دادن به سؤالات نبودند، می‌توانستند از کلاس خارج شوند. ضمناً به دانش‌آموزان این اطمینان نیز داده شد که نمرهٔ آزمون، هیچ تأثیری بر نمرهٔ ریاضی آن‌ها نخواهد داشت و صرفاً یک کار تحقیقاتی است و نوشتن نام و نام خانوادگی‌شان ضرورتی ندارد. لازم به ذکر است که مدت زمان در نظر گرفته‌شده برای پاسخگویی به سؤالات، پانزده دقیقه بود. ابزار جمع‌آوری داده‌ها در این پژوهش، چند مسئله بود که قبل از اجرای اصلی، چند بار اجرای آزمایشی شد تا مشکلات احتمالی آن برطرف و اعتبار ابزار در رابطه با هدف تحقیق روشن شود.

نتایج

در این قسمت، به تحلیل نتایج آزمون اصلی، به تفکیک هر سؤال، می‌پردازیم.

سؤال۱. در جاهای خالی عدد مناسب بنویسید.

بخش‌های مختلف سؤال ۱، به نوعی حل معادلهٔ درجهٔ اول بدون استفاده از متغیرها بود تا میزان درک دانش‌آموزان از نماد تساوی، قبل از اینکه وارد قوانین حل معادله شوند، مشخص‌شود.

الف. ۳–. . . . . = ۱۴×۳

به این سؤال حدود ۶۶ درصد (۲۹ نفر) دانش‌آموزان پاسخ درست دادند و عدد ۴۵ را در جای خالی قراردادند. حدود ۳۴ درصد (۱۵ نفر) نیز به این سؤال پاسخ‌های متفاوت دادند.

حدود ۷ درصد (۳ نفر) دانش‌آموزان عدد ۴۲ را به‌عنوان پاسخ در جای خالی نوشتند، که به‌نظر می‌رسد بدون در نظرگرفتن عددِ بعد از جای خالی حاصل عملیات قبل از تساوی را به‌دست آوردند و یادداشت کردند. این دسته از دانش‌آموزان علامت تساوی را «نمادی برای انجام دادن چیزی» می‌بینند.

حدود ۷ درصد (۳ نفر)، عدد ۴۸ را در جای خالی قراردادند، که به‌نظر می‌رسد بر اثر اشتباه محاسباتی این اتفاق رخ داده است.

حدود ۷ درصد (۳ نفر)، عدد ۳۹ را در جای خالی قرار دادند. این دانش‌آموزان تشخیص داده بودند که دو طرف تساوی باید با هم برابر باشد اما بدون در نظرگرفتن علامت تفریقِ بعد از جای خالی، عدد ۳۹ را به‌عنوان پاسخ نوشته و درحقیقت ۳۹ را با ۳ جمع کرده بودند.

عبارت ۱۴×۳ را نیز حدود ۷ درصد (۳ نفر) از دانش‌آموزان در جای خالی قرار دادند، به‌نظر می‌رسد برای این دانش‌آموزان علامت تساوی نمادی برای جابه‌جایی اعداد است.

ب. ۹-. . . . .= ۵-۹

۷۰ درصد (۳۱ نفر) دانش‌آموزان به این سؤال پاسخ صحیح و ۳۰ درصد (۱۳ نفر) پاسخ نادرست دادند؛ اعداد ۴ و ۵ را در جای خالی قراردادند.

۱۴ درصد (۶ نفر) دانش‌آموزان عدد ۴ را بعد از علامت تساوی نوشتند. این‌ها، طبق نظر مولینا و آمبروس و کاسترو (۲۰۰۴) نماد تساوی را فرمانی برای انجام عملیات دیده بودند.

۱۶ درصد (۷ نفر) دانش‌آموزان عدد ۵ را در جای خالی نوشتند. اینان، طبق نظر اِسیین و سِتَتی (۲۰۰۶) به بیش تعمیمی خاصیت جابه‌جایی تمایل دارند.

ج. ۳۱+۲۷ =. . . . .+۲۴

به این سؤال، حدود ۹۰ درصد (۴۰ نفر) پاسخ درست و ۵ درصد (۲ نفر) پاسخ نادرست (عدد ۵۸) دادند؛ ۵ درصد (۲ نفر) نیز پاسخی به این سؤال ندادند.

از دو نفری که عدد ۵۸ را به‌عنوان پاسخ نوشته بودند، یک نفر به تمامی بخش‌های سؤال ۱ پاسخ نادرست داده بود و بلافاصله عملیات قبل از علامت تساوی را انجام داده بود.

د. ۵+. . . . . = ۵÷۱۰۰

۹۳ درصد (۴۱ نفر) دانش‌آموزان به این سؤال پاسخ درست دادند و ۷ درصد (۳ نفر) عدد ۲۰ را در جای خالی قرار دادند.

ه. . . . . -۱۳ = $\frac{۱۶۹}{۱۳}$

در مجموع، ۷۳ درصد (۳۲ نفر) به این سؤال پاسخ درست و ۲۳ درصد (۱۰ نفر) پاسخ نادرست دادند. ۴ درصد (۲ نفر) نیز به کلی پاسخ ندادند.

از بین ده نفری که به این سؤال پاسخ نادرست دادند، پنج نفر عدد ۲۶، دو نفر عدد ۱۶۹، دو نفر عدد ۱۲ و در کمال تعجب یک نفر حاصل $\frac{۱۶۹}{۱۳}$ را ۵/۳۰ به‌دست آورده بود و در کنار سؤال، یادداشت کرده بود که دو طرف تساوی باید با هم برابر باشد و در جای خالی عدد ۱۸/۳۰ را قرارداده‌بود.

نتایج به‌دست‌آمده از سؤال ۱

با توجه به مراحل تکامل درک علامت تساوی که مولینا و آمبروس (۲۰۰۸) به آن اشاره کردند، نتایجی که از این تحقیق به‌دست آمد، مشخص کرد که دانش‌آموزان به مراحل اول و دوم درک دست‌یافته‌اند، یعنی علامت تساوی را محرکی برای پاسخ می‌دانند و به‌عنوان فرمانی برای اجرای عملیات درک می‌کنند، همچنین ویژگی تقارنی (از چپ به راست و از راست به چپ) این نماد را تشخیص می‌دهند، اما هنوز به مرحلهٔ بیان تعادل، که باعث درک کامل مفهوم تساوی می‌شود، دست نیافته‌اند.

در حقیقت، علامت تساوی را نمادی برای اجرای عملیات و یافتن یک پاسخ برای آن می‌بینند و بنا به عقیدهٔ بِر و همکاران (۱۹۸۰) این علامت را نمادی برای انجام دادن چیزی می‌بینند.

به‌عنوان مثال، در قسمت الف سؤال ۱، دانش‌آموزانی که عدد ۴۲ را در جای خالی نوشتند نشان دادند که تنها به مرحلهٔ اول درک تساوی رسیده‌اند، یعنی علامت تساوی را محرکی برای پاسخ می‌دانند.

دانش‌آموزانی که عدد ۳۹ را به‌جای پاسخ نوشتند، مرحلهٔ دوم درک یعنی ویژگی تقارنی علامت تساوی را فهمیده‌اند و می‌توانند به این علامت از چپ به راست و از راست به چپ نگاه کنند، اما هنوز به مرحلهٔ بیان تعادل نرسیده‌اند.

آن دسته از دانش‌آموزان که ۱۴× را در جای خالی نوشتند، مطابق با نظر اِسیین و سِتتی (۲۰۰۶) با توجه به خاصیت جابه‌جایی که قبلاً در مورد ضرب یاد گرفته‌اند، به بیش‌تعمیمی این خاصیت تمایل پیدا می‌کنند.

دانش‌آموزانی که پاسخ‌های نادرستی به قسمت ب سؤال ۱ دادند، به دو دسته تقسیم می‌شوند:

دستهٔ اول، دانش‌آموزانی که عدد ۴ را در جای خالی قرار دادند. این دانش‌آموزان حاصل عبارت ۵-۹ را به‌دست آوردند و به عملیات بعد از جای خالی توجهی نشان ندادند؛ که طبق نظر پریدیگر (۲۰۱۰) فقط معنی عملیاتی علامت تساوی، یعنی کاربرد غیرمتقارن آن را درک کرده‌اند.

دستهٔ دوم، کسانی بودند که عدد ۵ را به‌عنوان پاسخ نوشتند. آن‌ها کاربرد متقارن علامت تساوی را می‌دانند اما به‌خاطر عدم وجود تفکر رابطه‌ای مرتبط، آن را به خاصیت جابه‌جایی در تفریق گسترش می‌دهند.

نتایج به‌دست‌آمده از قسمت **ج** و **د** نیز مشابه قسمت‌های **الف** و **ب** است.

در قسمت **ه** حدود ده نفر عدد ۲۶ را در جای خالی قرار دادند. به‌نظر می‌رسد این دانش‌آموزان

درک کـرده بودند که دو طرف علامت تسـاوی باید به تعادل برسـد، اما بررسـی این پاسخ نشان داد که ممکن اسـت دانش‌آموزان به‌طور ضمنی مفهومی را درک کنند در حالی‌که قادر نیسـتند آن مفهوم را در فرایند حل مسائل مرتبط به‌کار برند.

همچنین نتایج به‌دسـت‌آمده با نتایج تحقیقی که اِسـیین و سِـتتی (۲۰۰۶) بـر روی دانش‌آموزان پایهٔ هشتم و نهم انجام دادند، سازگار است. به این معنی که با بزرگ‌تر شدن دانش‌آموزان از نظر سنی و بالارفتن پایهٔ تحصیلی آن‌ها، درکشان از علامت تساوی به‌طور کامل اصلاح نمی‌شود و هنوز این نماد را علامتی برای رسیدن به جواب می‌دانند.

به‌نظر می‌رسـد این بدفهمی، از جمله، ریشـه در آموزش پیشین دانش‌آموزان دارد، زیرا به گفتهٔ پریدیگر (۲۰۱۰) آمـوزش حسـاب دورهٔ ابتدایی بـا تمرکز بر تساوی‌های نامتقارن مثل ۱=۳-۶÷۲۴ به معنی عملیاتیِ علامت تساوی تأکید می‌کند و در نتیجه، کاربرد متقارن و رابطـه‌ای علامت تسـاوی در جبـر دورهٔ راهنمایی و دبیرستان با مشکل مواجه می‌شود.

کارپنتـر، فرانک و لوی (۲۰۰۳) نیز با تحقیقی که بر روی دانش‌آموزان پایهٔ اول تا ششـم انجام دادند، به این نتیجه رسـیدند که حتی با بالارفتن پایهٔ تحصیلی دانش‌آموزان، باز هم در حل سـؤال ۵+ ـــ = ۴ + ۸ با مشکل مواجه می‌شوند و عدد ۱۲ یا ۱۷ را در جای خالی قرار می‌دهند.

برای انجام بهتر تجزیه‌وتحلیـل داده‌ها و آگاهی از چگونگی و چرایی درک دانش‌آموزان از علامت تساوی، مصاحبه‌ای با دو نفر از دانش‌آموزان که به سؤال ۱ پاسخ اشتباه دادند، صورت گرفت:

پژوهشگر: چرا در قسمت د عدد ۲۰ را قرار دادی؟

دانش‌آموز ۱: چون ۱۰۰ تقسیم بر ۵ می‌شود ۲۰.

پژوهشـگر: به‌نظر تو علامت تسـاوی به چه معنی است؟

دانش‌آموز ۱: علامت تسـاوی مثل این می‌ماند که دو چیز را جمع کنی و در نهایت جواب را بنویسی یا دو چیز را از هم کم کنی و بعد از علامت تساوی جوابش را بنویسی. تساوی، برابر بودن را نشان می‌دهد.

پژوهشـگر: در سؤال ۱، قسـمت ب، عدد ۵ را قرار دادی. توضیح بده که چطور به این عدد رسیدی.

دانش‌آموز۲: چون سؤال می‌گوید ۹ منهای ۵ برابر اسـت با یک چیزی منهای ۹. من گفتم، چون برابرند پس همان چیزی که در طرف چپ است باید در طرف راسـت قرار بگیرد، به‌همین دلیل نوشـتم ۹ منهای ۵ مساوی است با ۵ منهای ۹.

همان‌طور که از مصاحبه‌ها مشـخص اسـت، این دو دانش‌آموز هر کدام درک خاصی از علامت تسـاوی دارند. دانش‌آموز ۱ مانند حسـاب دورهٔ ابتدایی علامت تسـاوی را نمادی برای رسـیدن به جواب می‌داند و به عملیاتی که بعد از جای خالی قرار گرفته است، توجهی نشان نمی‌دهد.

دانش‌آموز ۲ نیز به بیش‌تعمیمی خاصیت جابه‌جایی تمایل دارد و چون می‌داند علامت تساوی ویژگی تقارنی دارد از این خاصیت برای پاسـخ به این سؤال استفاده می‌کند.

بـا توجه بـه نتایجی که به‌دسـت آمـد، به‌نظر می‌رسـد پیشـنهاد محققـان، مبنـی بـر آموزش زود هنگام جبـر یعنی از دوران ابتدایی پیشـنهاد منطقی‌ای‌باشـد.

بنابراین به‌دلیل این‌که علامت تساوی پل ارتباطی بین حساب و جبر است، توجه ویژه به یادگیری کامل این مفهوم در دوران ابتدایی توصیه می‌شود.

سـؤال۲. عبارت ریاضی زیر درسـت است یا نادرست؟ دلیل خود را توضیح دهید.

۵+۹ =۱۴÷۲ =۷×۳ =۲۱

حـدود ۶۳ درصد (۲۸ نفـر) دانش‌آموزان به این سؤال پاسخ درست و حدود ۳۴ درصد (۱۵ نفر) پاسخ نادرست دادند. ۳ درصد (۱ نفر) نیز پاسخ نداند.

از بین پاسخ‌های متفاوتی که به این سؤال داده شده اسـت، دو پاسخ، نظر پژوهشگر را بیشتر به خود جلب کرد:

۱. درست است؛ چون ابتدا ضرب یا تقسیم هرکدام را، که از سمت چپ اولویت دارد، باید انجام داد، سپس جمع را؛

۲. درست است؛ چون هرکدام از عبارت‌ها مضربی از ۷ هستند.

این پاسخ‌ها در واقع تأیید گفتهٔ آیزنر (۲۰۰۰) است که می‌گوید: «دانش‌آموزان، هم بیشـتر و هم کمتر از آنچه که به آن‌ها تدریس می‌شود، می‌آموزند».

فهم علامت تسـاوی به‌عنوان یک نماد تک‌جهتی کامـلاً مرتبط با درک آن به‌عنوان نمـادی برای انجام دادن چیزی اسـت. هـر دو مفهوم به‌دنبال محاسـبهٔ کمیت طرف چپ علامت تسـاوی هسـتند (اِسیین و سِتتی، ۲۰۰۶).

برای مثال، بِر و همکاران (۱۹۸۰) و کی‌یِرن (۱۹۸۱) دریافتند که دانش‌آموزان از پذیرش این‌که عبارت ریاضی ۴+۲= ---، از نظر ریاضی صحیح است، خودداری می‌کنند و اظهار می‌کنند که علامت تساوی در مکان اشتباهی قراردارد. از نظر این دانش‌آموزان فقط وقتی این عبارت ریاضی صحیح است که به‌شکل --- = ۴+۲ نوشته شود و بتوان این عبارت را از چپ به راست خواند.

همچنین مولینا و آمبروس (۲۰۰۸) بیان کردند که دانش‌آموزان وقتی با جملات عددی ناآشنا مواجه می‌شوند، که متفاوت از شکل قراردادی a ± b=c هستند، در تفسیر علامت تساوی به‌عنوان نماد تعادلی با مشکل روبه‌رو می‌شوند.

پژوهشگر برای اینکه از چگونگی و چرایی پاسخ به این سؤال آگاه شود، از یکی از دانش‌آموزان در مورد نحوهٔ پاسخگویی به این سؤال مصاحبه به‌عمل آورد:

پژوهشگر: تو در سؤال ۲ بیان کردی که این عبارت، صحیح است. چطور به این نتیجه رسیدی؟

دانش‌آموز: این عبارت، از نظر ریاضی درست است. چون ۵+۹ برابر است با ۱۴ و ۱۴ تقسیم بر ۲ برابر است با ۷، ۷ هم ضرب در ۳ می‌شود، ۲۱. که جواب آن هم درست است.

بعد از گفت‌وگو با این دانش‌آموز، برای پژوهشگر مشخص شد که نحوهٔ آموزش گذشتهٔ دانش‌آموزان در حساب می‌تواند یکی از دلایل این اشتباه باشد. به‌همین دلیل است که استانداردهای انجمن ملی معلمان ریاضی (NCTM، ۲۰۰۰) پیشنهاد می‌کند که تفکر جبری باید در اوایل دورهٔ ابتدایی گسترش یابد.

با توجه به مراحل درک تساوی که مولینا و آمبروس (۲۰۰۸) در نظرگرفته‌اند، به‌نظر می‌رسد دانش‌آموزان به مرحلهٔ اول درک یعنی محرکی برای پاسخ دست یافته‌اند.

در مورد این سؤال حتی به ویژگی تقارنی علامت تساوی (مرحلهٔ دوم درک) نیز توجه نکرده‌اند. همین موضوع نشان می‌دهد که دانش‌آموزان در محاسبات می‌توانند به‌خوبی عمل کنند اما درک ناقص آن‌ها از تساوی باعث می‌شود که این عبارت را از نظر ریاضی درست بدانند.

نتایجی که از تجزیه‌وتحلیل این سؤال به‌دست آمد، با نتایجی که اِسیین و سِتتی (۲۰۰۶) به‌دست‌آوردند، سازگار است. به این معنی که هنوز در پایهٔ اول متوسطه (نهم) دانش‌آموزانی هستند که درک کاملی از علامت تساوی ندارند و به این علامت به‌صورت نمادی تک‌جهتی نگاه می‌کنند و به این موضوع توجه نمی‌کنند که علامت تساوی باید یک رابطهٔ تعادلی را نشان دهد، بنابراین عدد ۱۴ نمی‌تواند با ۲۱ برابر باشد.

سؤال ۳. در یک ظرف میوه ۵ عدد سیب قرار دارد. اگر یک سیب دیگر به سیب‌ها اضافه شود، تعداد سیب‌های ظرف، ۶تا می‌شود. اگر باز هم دو سیب دیگر در ظرف گذاشته شود، تعداد سیب‌های داخل ظرف میوه چندتا می‌شود؟ با نوشتن راه‌حل توضیح دهید.

این سؤال در ابتدا، برای دانش‌آموزان، ساده به‌نظر می‌رسید و آن‌ها بلافاصله جواب را اعلام می‌کردند، اما زمانی که از آن‌ها خواسته شد که راه‌حل سادهٔ آن را بنویسند، ۲۷ درصد (۱۲ نفر) آن‌ها پاسخ را به‌صورت ۵+۱=۶+۲=۸ نوشتند که به عقیدهٔ اِسیین و سِتَتی (۲۰۰۶) این دسته از دانش‌آموزان علامت تساوی را نمادی **تک‌جهتی** می‌بینند، یعنی نمادی که از چپ به راست برای آن‌ها معنی دارد.

برای پژوهشگر جالب بود که هشت نفر از دانش‌آموزانی که به سؤال ۲ پاسخ نادرست دادند، راه حل سؤال ۳ را درست نوشتند و پنج نفر از آن‌ها که به سؤال ۲ پاسخ صحیح دادند برای سؤال ۳ پاسخ ۵+۱=۶+۲=۸ را نوشته بودند. شش نفر هم هر دو سؤال ۲ و ۳ را اشتباه جواب دادند.

در مجموع، ۶۸ درصد (۳۰ نفر) به این سؤال پاسخ درست و ۲۷ درصد (۱۲ نفر) پاسخ نادرست دادند؛ ۵ درصد (۲ نفر) نیز به‌کلی پاسخ ندادند.

برای اینکه پژوهشگر در مورد نحوهٔ تفکر دانش‌آموزان راجع به این سؤال آگاه شود، با یکی از دانش‌آموزان که به این سؤال پاسخ نادرست داده بود مصاحبه‌ای انجام داد.

پژوهشگر: می‌توانی در مورد راه‌حلی که نوشته‌ای، توضیحی بدهی؟

دانش‌آموز: در ابتدا به ۵ سیب خود، ۱ سیب دیگر اضافه می‌کنیم تا تعداد سیب‌ها به ۶ برسد. اگر باز هم ۲ سیب دیگر به مجموع سیب‌های خود اضافه کنیم، حاصلِ ما به ۸ می‌رسد.

این خطا در نمادگذاری، ناشی از ترجمهٔ عبارت کلامی به جملهٔ ریاضی است (لیون، ۲۰۰۳، نقل شده در اِسیین و سِتتی، ۲۰۰۶)

کی‌یِرن (۱۹۸۱) دریافت که دانش‌آموزان دورهٔ ابتدایی علامت تساوی را به‌عنوان نمادی می‌بینند که مسئله و پاسخ مسئله را از هم جدا می‌کند. از نظر وی، فقط تغییر معانی از عملیاتی به رابطه‌ای، قانون قراردادی «جملات هر دو طرف معادله را بخوان» را توجیه می‌کند

توضیح شفاهی این دانش‌آموز صحیح اما ترجمه‌اش به جملهٔ ریاضی نوشتاری نادرست است.

شلیمن، کاراهر، بریزولا و جونز (۱۹۹۸) و فاکنر و همکاران (۱۹۹۹) نیز مشاهده کردند که دانش‌آموزان زمانی‌که درگیر زمینه‌های فیزیکی واقعی یا مسائل کلامی شفاهی می‌شوند، درک صحیحی از تساوی نشان می‌دهند.

در مورد سؤال ۳، به‌نظر می‌رسد دانش‌آموزان علامت تساوی را برای بیان تعادل بین دو عبارت به‌کار نمی‌برند، بلکه از آن به‌عنوان یک دستور برای محاسبهٔ مقدار عبارت قبلی استفاده می‌کنند.

در واقع، نتیجه‌ای که از این سؤال به‌دست آمد، تأییدی بر گفته اَسکیو و ویلیام (۱۹۹۵- نقل شده در لی، ۲۰۰۶) است که می‌گویند: «به‌نظر می‌رسد، آموزش به روشی که مانع ایجاد هر نوع بدفهمی در دانش‌آموزان شود، ممکن نیست. ما باید بپذیریم که دانش‌آموزان برخی تعمیم‌ها را که صحیح نیستند می‌سازند. بسیاری از این بدفهمی‌ها پنهان می‌ماند تا اینکه معلم با تلاش‌های ویژه‌ای آن‌ها را آشکار کند. »

شاید به‌همین دلیل است که یکی از نگرانی‌های اصلی معلمان ریاضی، اصلاح یادگیری و درک دانش‌آموزان است (هال، ؟). تحلیل خطا می‌تواند ابزار مفیدی در این فرایند باشد. همان‌طور که لابینوویچ (۱۹۹۳، نقل شده در هال، ؟) بیان می‌کند «خطاهای کودک در واقع، مراحل طبیعی یادگیری هستند».

نتیجهٔ به‌دست آمده از این سؤال، مشخص کرد که با توجه به معانی متفاوتی که پریدیگر (۲۰۱۰) برای علامت تساوی در نظرگرفته است، معنی عملیاتی این نماد باز هم بیشتر مورد توجه دانش‌آموزان است و به‌جز تعداد کمی از آن‌ها، به این علامت به‌عنوان یک رابطهٔ تعادلی نگاه نمی‌کنند.

همچنین، با توجه به مراحل درکی که مولینا و آمبروس (۲۰۰۸) برای علامت تساوی در نظرگرفته‌اند، مشخص می‌شود که، با اینکه دانش‌آموزان می‌توانند به‌طور شفاهی به جواب درست برسند، اما به‌دلیل اینکه به مرحله سوم درک تساوی، یعنی بیان تعادلی، نرسیده‌اند، قادر نیستند علامت تساوی را به‌درستی تفسیر کنند.

نتایجی که از تحلیل این سؤال به‌دست آمد، با نتایج تحقیق اِسیین و سِتتی (۲۰۰۶) سازگار است، به این معنی که دانش‌آموزان در پاسخ‌گویی به این سؤال نشان دادند که علامت تساوی را نه‌تنها به‌عنوان نمادی برای انجام دادن چیزی می‌بینند، بلکه آن را به‌عنوان نمادی تک‌جهتی تفسیر می‌کنند.

سؤال ۴. معادلهٔ زیر را حل کنید. هر مرحله از راه‌حل خود را بنویسید و بیان کنید در هر مرحله، چه کاری انجام داده‌اید.

۴x+۴ = ۴x+۱

این سؤال برای روشن شدن این موضوع طراحی شد که آیا دانش‌آموزان، با توجه به تصوری که از مفهوم تساوی دارند به این نتیجه می‌رسند که معادله جواب ندارد؟ و یا اینکه براساس رویه‌هایی که برای حل معادله یاد گرفته‌اند، معادله را حل می‌کنند و به جواب می‌رسند.

تنها حدود ۳۸ درصد (۱۷ نفر) به این سؤال پاسخ درست دادند، که البته بعد از انجام دادن رویه‌های حل معادله (معلوم و مجهول کردن) به عبارت ۳- = ۰ رسیدند و در نهایت به این نتیجه رسیدند که معادله جواب ندارد.

حدود ۵۷ درصد (۲۵ نفر) معادله را حل کردند و به پاسخ نادرست ۳- = x رسیدند و حدود ۵ درصد (۲ نفر) به این سؤال پاسخی ندادند.

به‌نظر می‌رسد، حفظ‌کردن قوانینِ بدون دلیل آن‌قدر در ذهن دانش‌آموزان رسوخ کرده‌است که حتی دانش‌آموزانی که به سؤالات قبلی پاسخ درست دادند، نتوانستند به این سؤال پاسخ صحیح دهند.

در مجموع، ۲۰ درصد (۹ نفر) دانش‌آموزان به تمامی سؤالات پاسخ صحیح دادند و بقیه آن‌ها حداقل یک پاسخ نادرست در آزمون داشتند.

تحقیقات متعدد نشان می‌دهد که تفسیر دانش‌آموزان از علامت تساوی به‌عنوان نمادی برای انجام دادن چیزی یا نمادی تک‌جهتی، ناشی از روش آموزشی سال‌های قبل است (بِر و همکاران، ۱۹۸۰؛ فرودنتال، ۱۹۸۳؛ کی‌یِرِن، ۱۹۸۰؛ استیسی و مک گریگور، ۱۹۹۷؛ کارپنتر و همکاران، ۲۰۰۳- نقل شده در اسیین و ستتی، ۲۰۰۶.)

در پایه‌های بالاتر تحصیلی، این تصور همچنان باقی می‌ماند و حتی از طریق آموزش دستورالعمل‌ها در جبر تقویت می‌شود: آموزش قوانین (بدون دلیل) برای کار با عبارات جبری منجر به درک محدود می‌شود. برای مثال، پژوهشگر، از یکی از دانش‌آموزانی که به این سؤال

پاسخ نادرست داده بود، مصاحبه به‌عمل آورد:

پژوهشگر: توضیح بده این معادله را چگونه حل کردی؟

دانش‌آموز: ابتدا باید تمام جملات مشابه را به یک طرف منتقل کنیم، بنابراین تمام اعداد را به یک طرف و تمام xها را به‌طرف دیگر می‌بریم، سپس جملات متشابه را با هم می‌گیریم. یک 4x در این طرف داریم، برای آوردن 4x دیگر از طرف دیگر باید علامت آن را عوض کنیم، که در اینجا علامتش منفی می‌شود، یعنی 4x-4x.

عدد ۴ هم باید در کنار عدد ۱ قرار بگیرد، پس آن هم منفی می‌شود. یعنی بعد از معلوم مجهول کردن، معادله را حل می‌کنیم.

پاسخ دانش‌آموز به این سؤال نشان می‌دهد، که درک او از علامت تساوی، ابزاری است.

هیچ یک از دانش‌آموزان، روش حل خود را طوری توضیح نداد که به نقش مهم علامت تساوی در معادله اشاره کند. هیچ‌یک حتی توضیح نداد که وقتی یک کمیت به‌طرف دیگر برده می‌شود، چگونه علامتش تغییر می‌کند، یا اضافه کردن مقادیر یکسان به دو طرف معادله، برای برابر نگه داشتن دو طرف، ضروری است. آن‌ها فقط «قوانین بدون دلیل» را می‌دانند. (اسکمپ، ۱۹۷۶- نقل شده در اِسیین وِستتی، ۲۰۰۶)

اولیویر (۱۹۹۶) نیز بحث می‌کند که «یادگیری جدیدِ نادرست، اساساً نتیجه یادگیری درست گذشته است».

البته نمونه‌های بسیاری وجود دارد که با تفسیر علامت تساوی به‌عنوان نمادی برای انجام دادن چیزی یا نمادی تک‌جهتی، پاسخ صحیح را فراهم می‌آورد.

کی‌یِرِن (۱۹۸۱) نیز مشاهده کرد که حتی دانش‌آموزانی که یک روش آموزشی مناسب را دریافت کرده‌اند، که در آن روش بر علامت تساوی به‌عنوان یک رابطه تأکید می‌شود، هنوز نمی‌توانند مفهوم صحیح علامت تساوی را بپذیرند. چنین بدفهمی‌هایی در دبیرستان و دانشگاه نیز وجود دارد. (کلمنت، ۱۹۸۲- به نقل از لی، ۲۰۰۶)

پاسخ‌های دانش‌آموزان به این سؤال، تأییدی بر یافته‌های مک‌نیل و آلی بالی (۲۰۰۵) است، که می‌گویند: درجهٔ پیوستگی دانش‌آموزان به الگوی عملیاتیِ علامت تساوی اساساً مرتبط است با اینکه چگونه آن‌ها یک روش صحیح را برای حل معادلات تولید می‌کنند.

در مورد سؤال ۴، دانش‌آموزان با استفاده از معنی رابطه‌ایِ علامت تساوی و بدون اینکه معادله را حل کنند، می‌توانستند از دو طرف معادله دو جملهٔ یکسان 4x را حذف کنند و به این نتیجه برسند که معادله جواب ندارد. در حالی‌که چون قوانین معادله را بدون دلیل یاد گرفته‌اند، ابتدا معادله را حل می‌کنند و سپس بیان می‌کنند که معادله غلط است و جواب ندارد.

نتایج به‌دست‌آمده با نتایج تحقیقات پیشین سازگار است، به این معنی که:

اِسیین و سِتتی (۲۰۰۶) مطرح کردند که دانش‌آموزان نتوانستند، معادله را، بدون استفاده از قوانین حل آن، حل کنند و به معنی رابطه‌ای علامت تساوی توجهی نشان ندادند.

متیوز و همکاران (۲۰۱۲) نیز بیان کردند که، دانش‌آموزان، معادلاتی را که در یک طرف علامت تساوی عملیات دارد، نسبت به معادله‌ای که در دو طرف علامت تساوی عملیات حسابی دارد، راحت‌تر حل می‌کنند.

با تفسیری که پریدیگر (۲۰۱۰) از علامت تساوی دارد، در این سؤال دانش‌آموزان به معنی عملیاتی علامت تساوی توجه دارند.

با توجه به مراحل تکامل درکی که مولینا و آمبروس (۲۰۰۸) از علامت تساوی بیان کرده‌اند، نتیجه تحلیل این سؤال نشان می‌دهد که دانش‌آموزان در زمان حل معادله به مرحلهٔ اول و دوم درک رسیده‌اند اما به این نکته توجه ندارند که معادله به نوعی بیان یک رابطهٔ تعادلی است.

برخی از محققان برای یادگیری بهترِ معادله ایدهٔ استفاده از ترازوی متعادل را پیشنهاد می‌کنند، که بازنمایی یک رابطهٔ معادل بین دو کمیت است. اما اِسیین و سِتتی (۲۰۰۶) عقیده دارند که چگونه می‌توان با استِفاده از ترازوی متعادل sin۳۰ = ۰/۵ یا $\sqrt{2}$ = ۱/۴۱۴۲ . . را نشان داد. یا حتی این موضوع، مشکل‌تر می‌شود، وقتی که موضوع بحث وارد جبر می‌شود.

بحث و نتیجه گیری

تجزیه‌وتحلیل داده‌های تحقیق نشان داد که اکثر دانش‌آموزان ابزارهای لازم را برای حل معادله، که همان قوانین حل معادله است، در اختیار دارند. اما به‌دلیل اینکه درک درستی از علامت تساوی ندارند قادر نیستند با کمک گرفتن از معنی رابطه‌ایِ علامت

تساوی به حل معادله بپردازند.

در واقع، بیشـترین تفسـیری که دانش‌آموزان از علامت تساوی دارند، این است که آن را نمادی برای **انجام دادن چیزی** یا **یافتن یک پاسـخ** می‌دانند. از این نظر، علامت تساوی ابزاری برای نوشتن جواب است.

مفهوم دیگری که در این مطالعه مشـخص شد، درک علامت تسـاوی به‌عنوان نمـادی **تک‌جهتی** بود، که این نوع درک در سـؤال‌های ۲ و ۳ مشخص شد. یعنی این نماد برای اکثر دانش‌آموزان از چپ به راست معنی دارد.

دانش‌آمـوزان پایهٔ اول متوسـطه (نهم) در مورد مفهـوم علامت تسـاوی با بدفهمی‌هـای زیر مواجه هستند.

۱. به علامت تساوی به‌عنوان نمادی برای اجرای یک عملیات نـگاه می‌کنند و به عملیات بعد از جای خالی توجهی ندارند؛

۲. بـه بیش‌تعمیمیِ خاصیـت جابه‌جایی تمایل دارند؛

۳. علامت تساوی را نمادی تک‌جهتی می‌بینند، که عملیات را از چپ به راست اجرا می‌کند؛

۴. بدفهمی دیگری که مشـخص شـد، در مورد ترجمهٔ یک مسـئله کلامی به زبان ریاضی بود. یعنی دانش‌آموزان به‌طور شـفاهی قادرند راه‌حل مسئله را بیان کنند، اما هنگامی‌که از آن‌ها خواسـته می‌شود، راه‌حل را به زبان ریاضی بنویسـند، علامت تساوی را برای ارتبـاط و اتصال بین مراحل حل سـؤال به‌کار می‌برند. علی‌رغم اینکه در ابتدا، دانش‌آموزان به ساده بودن سؤال اشاره کردند، اما ۲۷ درصد (۱۲ نفر) آن‌ها راه‌حل را به‌صورت ۸=۲+۶=۱+۵ نوشتند.

۵. بیشـترین اشتباه در حل معادله، این است که دانش‌آمـوزان معادله و نماد تسـاوی را به منزلهٔ یک نمـاد برای انجام چند عملیات ریاضی و سـاده‌کردن می‌بینند و با دیـدن آن بدون حتی لحظه‌ای درنگ، از اطلاعاتشـان در مورد نوع معادلـه کمک گرفته و شـروع به حل می‌کنند و حل معادله را مستلزم طی یک سـری مراحل می‌داننـد و در میان راه‌حل خود، به مفهوم آنچه می‌نویسـند، کمتر توجه دارند و فقط سعی می‌کنند از یک مرحله، مرحلهٔ دیگری را نتیجه بگیرند (برهمند، ۱۳۸۶). این نوع اشـتباه در بررسی سؤال ۴ مشخص شد.

برخی از فعالیت‌های آموزشـی کـه می‌توانند به یادگیری بهتر مفهوم تسـاوی کمک کنند، عبارت‌اند از:

۱. روش جایگزینـی: استیسـی و مک‌گریگـور (۱۹۹۹) پیشنهاد کردند که دانش‌آموزان باید تشویق شـوند به روش جایگزینی، جواب‌هایشان را بنویسند. بـرای مثال، به‌جای ۱۵=۷+۸، بنویسـند ۹+۶=۷+۸، ۵×۳=۷+۸. این فعالیت نه‌تنها منجر به درک تساوی می‌شـود، بلکه به دانش‌آموزان می‌فهماند که هر عدد ترکیبی از اعداد دیگر است.

۲. عبارت‌هـای صحیح/ غلط: بـه این معنی که از دانش‌آموزان خواسـته شود، درسـتی یا نادرستی عبارت‌هایـی ماننـد، ۴۱=۱۴+۲۷، ۲×۵÷۳=۱۵، ۲-۵=۹-۱۴ را مشـخص کنند. این فعالیت، به معلم فرصتی می‌دهد تا بدفهمی‌هـای دانش‌آموزان مانندِ «بعد از نماد تساوی، جواب می‌آید» را ببینند.

پی‌نوشت‌ها

1. Saenz-Ludlow
2. Walgamuth
3. Prediger
4. Winter
5. Wolters
6. Theis
7. McNeil
8. Cortes

منابع

1. Ben-zeev, T. (1996). **When erroneous mathematical thinking is just as "correct"**: the oxymoron of rational errors. IN R. J. Sternberg & T. Ben-zeev (Eds). The Nature of Mathematical Thinking, (55-79). LEA Publishers.

2. Carpenter, T. P. , Franke, M. L. , & Levi, L. (2003). **Thinking mathematically**: integrating arithmetic and algebra in elementary school. Portsmouth: Heinemann.

3. Falkner, K. & Levi, L. & Carpenter, Th. (1999). **Children's understanding of equality: A foundation for Algebra**. Teaching children mathematics. (pp 232-236).

4. Foster, D. (2007). **Making Meaning in Algebra Examining Students'Understandings**

and Misconceptions**. Assessing Mathematical Proficiency
MSRI Publications, Volume 53, 2007,(pp. 163-176).
5. Griffin, P. & Hirst, Sh. & et al. (1989). **Project Mathematics update: preparing to teach equations**. In centre for Mathematics Education, The open university.
6. Hall, R. (). **An Analysis of Errors Made in the Solution of Simple Linear Equations**. (pp. 7-8).
7. Knuth, E. , & Stephens, A. , & McNeil, N. , & Alibali, M. (2006). **Does Understanding the Equal Sign Matter? Evidence from Solving Eqution**s. Journal for Research in Mathematics Education, Vol. 37, No. 4, (pp. 297-312).
8. LI, X. (2006). **Cognitive Analysis of Students' Errors and Misconceptions in Variables, Equations, and Functions**. Submitted to the Office of Graduate Studies of Texas A&M University in partial fulfillment of the requirements for the degree of DOCTOR OF PHILOSOPHY. (pp. 33-36).
9. LIoyd, M. G. & Pitts Bannister, R. V. (2010). **Secondary School Mathematics Curriculum Materials as Tools for Teachers' Learning**. In B. J. Reys; & R. E. Reys; & R. Rubenstein (Eds.), Mathematics Curriculum: Issues, Trends, and Future Directions: Seventy-second Yearbook, (pp. 327-331). Reston,VA, NCTM.
10. Matthews, P. , & Rittle-Johnson, B. , & McEldoon, K. , & Taylor, R. (2012). **Measure for Measure: What Combining Diverse Measures Reveals About Children's Understanding of the Equal Sign as an Indicator of Mathematical Equality**. Journal for Research in Mathematics Education. Vol. 43, No. 3, (pp. 220-254).
11. Molina, M. , Ambrose, R. & Castro, E. (2004). **In the transition from arithmetic to algebra:misconceptions of the equal sign**. Presented at the 28th International Group for the Psychology of Mathematics Education, Bergen, July 14-18, 2004.
12. Molina, M. & Ambrose, R. (2006). **Fostering Relational Thinking While Negotiating the Meaning of the Equal Sign**. Teaching Children Mathematics Vol. 13, No. 2, (pp. 111-117).
13. Molina, M. & Ambrose, R. (2008). **From an operational to a relational conception of the equal sign. Thirds graders' developing algebraic thinking**. Focus on Learning Problems in Mathematics, Vol. 30, No. 1, (pp. 61-80).
14. Oksuz, C. (2001). **Children's understanding of equality and the equal symbol**. In Adnan Menderes university.
15. Prediger, S. (2010). **How to develop mathematics for teaching and for understanding: the case of meanings of the equal sign**. J Math Teacher Edu, Vol. 13, (pp. 73–93). Published online: 27August 2009, Springer Science+Business Media B. V. 2009.
16. Sáenz-Ludlow, A. & Walgamuth, C. (1998). **Third graders' interpretation of equality and the equal symbol**. Educational Studies in Mathematics, Vol. 35, (pp. 153-187).
17. Skemp, R. R. (1989). **Mathematics in the primary school**. London: Rutledge.

۱۸. آیزنر، الیوت دبلیو. (۲۰۰۰). **آنان که گذشته را نادیده می‌گیرند...** ترجمه: سپیده چمن‌آرا و زهرا گویا (۱۳۸۱). مجلهٔ رشد آموزش ریاضی. سال ۱۹، شماره (۶۹)، صص ۴ تا ۱۸. دفتر انتشارات کمک‌آموزشی، سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، وزارت آموزش‌وپرورش.
۱۹. برهمند، علی. (۱۳۸۶). **فهم دانش‌آموزان از معادلهٔ درجهٔ اول**. رسالهٔ منتشرنشده کارشناسی ارشد آموزش ریاضی، دانشکدهٔ علوم ریاضی.
۲۰. بن زیو، تالیا. (۱۹۹۶). **منشأ خطاهای دانش‌آموزان**. ترجمه: سپیده چمن‌آرا (۱۳۹۰). مجلهٔ رشد آموزش ریاضی. سال ۲۹، شمارهٔ (۱۰۶)، صص ۱۱ تا ۱۶. دفتر انتشارات کمک‌آموزشی، سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، وزارت آموزش‌وپرورش.
۲۱. بیشاب، آلن- جی. (۱۹۹۸). **آموزش ریاضی و فرهنگ**. ترجمه: روح‌الله جهانی‌پور و زهرا گویا (۱۳۷۶). مجلهٔ رشد آموزش ریاضی. سال ۱۲، شمارهٔ (۵۰)، صص ۳ تا ۱۱. دفتر انتشارات کمک‌آموزشی، سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، وزارت آموزش‌وپرورش.
۲۲. چمن‌آرا، سپیده. (۱۳۸۳). **تدریس ریاضی: انتقال مفاهیم یا کمک به کشف آن‌ها؟!**. مجلهٔ رشد آموزش ریاضی. سال ۲۱، شمارهٔ (۷۸)، صص ۷ تا ۱۲. دفتر انتشارات کمک‌آموزشی، سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، وزارت آموزش‌وپرورش.
۲۳. چمن‌آرا، سپیده. (۱۳۸۴). **آشنایی با روش‌های تدریس ریاضی مبتنی بر دیدگاه ساخت وسازگرایی**. مجلهٔ رشد آموزش ریاضی. سال ۲۳، شمارهٔ (۸۱)، صص ۲۱ تا ۳۱. دفتر انتشارات کمک‌آموزشی، سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، وزارت آموزش‌وپرورش.
۲۴. حاجی‌بابایی، جواد. (۱۳۷۵). **در باب برنامهٔ درسی ریاضیات دبیرستان**. مجلهٔ رشد آموزش ریاضی. سال ۱۲، شمارهٔ (۴۶)، صص ۲ تا ۶. دفتر انتشارات کمک‌آموزشی، سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، وزارت آموزش‌وپرورش.
۲۵. حسام، عبدالله. (۱۳۸۳). **شهود، ریاضیات و آموزش**. مجلهٔ رشد آموزش ریاضی. سال ۲۱، شمارهٔ (۷۸)، صص ۱۳ تا ۲۲. دفتر انتشارات کمک‌آموزشی، سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، وزارت آموزش‌وپرورش.